

Abiturprüfung
Berufliche Gymnasien BW
Stochastik
Grundkurse 1900 bis 1999

Zweitkorrektur nicht bedingt

Text Nr. 74202

St. 1. Dezember 2019

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Da ich die Lizenz besitze, sämtliche Aufgaben der Haupt-Abiturprüfungen aus Baden-Württemberg zu veröffentlichen, baue ich eine große Sammlung auf. Nun findet man solche Aufgaben öfters im Internet. Doch meine ausführlichen Lösungen mit intensiver Besinnung auf die Grundlagen, sind sicher einmalig und hilfreich für Schüler / und auch Lehrer bzw. Referendare. Ich verwende ab und zu CAS-Screenshots, obwohl diese Aufgaben in der Regel nur mit GTR gelöst werden sollen.

Ab 2017 ist in BW sogar nur noch ein wissenschaftlicher Taschenrechner zugelassen!

Teil 2 dieser Themensammlung mit Prüfungsaufgaben der beruflichen Gymnasien.

74011	Analysis Teil 1	2000 bis 2009	in Planung
74012	Analysis Teil 2	2010 bis 2019	
74013	Analysis Teil 3	Anwendungsaufgaben 2000 bis 2009	
74014	Analysis Teil 4	Anwendungsaufgaben 2010 bis 2019	
74020	Analysis spezial:	Trigonometrische Funktionen	ab 2002
74030	Vektorgeometrie 0	1982 bis 1999	
74031	Vektorgeometrie 1	2000 bis 2005	
74032	Vektorgeometrie 2	2006 bis 2019	
74111	Matrizenrechnung	Verflechtungen, Leontief-Modell	ab 1982
74120	Matrizenrechnung	Bedarfsplanning, Kostenrechnungen	1982 bis 1999
74121	Matrizenrechnung	Bedarfsplanning, Kostenrechnungen	ab 2000
74122	Matrizenrechnung spezial	Ausgewählte Anwendungsaufgaben	
74131	Lineare Optimierung	ab 2005	
74201	Stochastik	GK 1980 bis 1989	
74202	Stochastik	GK 1990 bis 1999 (dieser Text)	
74203	Stochastik	LK 1980 bis 1989	
74206	Stochastik	GK 1990 bis 1999	
74211	Stochastik	2000 bis 2004	
74212	Stochastik	2005 bis 2009	
74213	Stochastik	ab 2010	

Teil 3: Fachschulreifeprüfung / Berufskolleg

74302	Analysis – ganzrational + Expo.	2002 bis 2009
74305	Analysis – Trigonometrische Funkt.	2002 bis 2009
74310	Analysis – alles	2010 bis 2014
74315	Analysis – alles	ab 2016
74321	Vektorgeometrie	
74331	Matrizenrechnung: wirtschaftliche Anwendungen	
74341	Stochastik	
74251	Wirtschaftsrechnen: Kosten- und Gewinnfunktionen	

Inhalt

Jahrgang / Aufgabe		Thema	Aufgabe - Lösung	
GK1990	A1	Glücksrad, 4 bzw. 3 Farbsektoren	4	39
	A2	2 Dosen mit versch. farb. num. Kugeln	5	41
	A3	Würfel mit 1 bis 4	6	43
	A4	Computermittel Zufallszahlen	7	45
	A5	Urne mit 7s, 2w Kugeln	8	48
	A6	12 Spielkarten mit Farbe und Zahl	9	50
GK 1991	A7	Laplace-Würfel	10	53
	A8	Urne mit 1w, 2r, 3b Kugeln	11	55
	A9	Defekte Bauteile, Geräte aus Bauteilen	12	57
	A10	Laplace-Kreisel		59
	A11	Glücksrad mit 0 bis 9	14	61
	A12	Mini-Lotto 1 bis 12, Gewinnklassen	15	64
GK 1992	A13	Urne mit 1gr, 2r, 3w, 4b Kugeln	16	66
	A14	10 Spielkarten mit Farbe und Zahl	17	69
	A15	Urne mit Kugeln 1 bis 6	18	72
	A16	2 Glücksräder 1 bis 8 und 1 bis 4	19	74
	A17	Oktaeder mit 1 bis 5	20	77
GK 1993	A18	Urne mit 3r, 4gr, 6b Kugeln,	21	79
	A19	Apfelkiste mit 20B, 40C, 40D. mit C, D Analyse	22	81
	A20	Würfel: 1 bis 6, n-mal b.	23	84
GK 1994	A21	25 Kugeln im Korb: b, f, r, w, g, u, v, Sterne	24	86
	A22	Telephon	25	89
	A23	Urne mit 9 Kugeln (1 bis 3)	26	92
GK 1995	A24	Urne mit 10 Karten (A, E, N, ... T)	27	95
	A25	Äpfel A und B in Kisten, Analysis-Zusatz	28	98
	A26	Urne U _n mit n weiß und 2n roten Kugeln	29	101
GK 1996	A27	Teufel und schiefes W (Bernd und Eva)	30	104
	A28	Krug mit 3 Glaskugeln (3r, 4b, 5ge)	31	106
GK 1997	A29	Urne mit 1b, 2r Kugeln	32	108
	A30	Teile auf Ballons werfen	33	110
GK 1998	A31	Kugeltrommel mit 2 „w2“, 2 „s3“, 1 „s5“	34	113
	A32	Spielkarten mit 4A, 3K, 2D, 1 B.	35	115
GK 1999	A33	Farbiger Würfel: 1r, 2 gr, 3 b.	36	118
	A34	Hobbygärtner mit Blumen	37	121

Hinweise:

1. Die DM-Währung wurde beibehalten.
2. Bei Verwendung des Binomialkoeffizienten wurde oft ein kennzeichnender Buchstabe eingefügt. So soll z. B. $\binom{5s}{3}$ bedeuten, dass $\binom{5}{3} = 10$ schwarze Kugeln verwendet werden.

Aufgabe 1: GK 1990

Gegeben sei ein Glücksrad (Abb.1) mit vier gleichgroßen Sektoren in den Farben Rot (r), Weiß (w), Blau (b) und Gelb (g).

Das Rad wird in Drehung versetzt. Bei Stillstand zeigt der Pfeil auf genau einen Sektor. Die Farbe dieses Sektors wird notiert.

Damit ist ein Durchgang beendet.

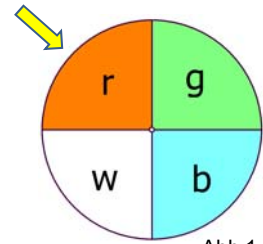


Abb.1

- a) Es werden drei Durchgänge durchgeführt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- A: Es wird immer die gleiche Farbe angezeigt.
- B: Es werden drei verschiedene Farben angezeigt.
- C: Gelb wird mindestens zweimal angezeigt.
- D: Weder Weiß noch Blau wird angezeigt.
- E: $C \cup D$.

- b) Es werden drei Durchgänge durchgeführt. Vor dem 1. Durchgang wird ein Sektor, dessen Farbe beim vorausgegangenen Durchgang angezeigt wurde, gelöscht und die beiden Nachbarfelder werden jeweils um die Hälfte des gelöschten Feldes vergrößert. Abb. 2 zeigt den Zustand des Rades vor dem 2. Durchgang nachdem beim 1. Durchgang Weiß angezeigt worden war.

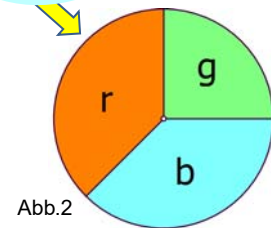


Abb.2

Tragen Sie in einem Baumdiagramm die notierten Farben und die Wahrscheinlichkeiten ein.

Die Zufallsvariable X sei definiert durch die Anzahl der Durchgänge, bis die Farbe Weiß angezeigt wird. Wird Weiß in einem der drei Durchgänge angezeigt, so soll X den Wert 4 annehmen.

Stellen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion $x \rightarrow w(x)$ durch eine Wertetabelle dar.

- c) Esther bietet Jana folgendes Spiel an:

Aus dem veränderbaren Glücksrad von Teil b) werden zwei Durchgänge durchgeführt.

Jana zahlt 2 DM Einsatz für ein Spiel.

Erscheint im 1. Durchgang Weiß und im 2. Durchgang Rot, so erhält Jana 8 DM, erscheint Blau im 1. oder im 2. Durchgang, erhält Jana 2 DM. In allen anderen Fällen behält Esther den Einsatz.

Wer gewinnt auf Dauer bei diesem Spiel?

Wie hoch müsste der Einsatz sein, damit beide gleiche Gewinnchancen haben?

Aufgabe 2: GK 1990

- a) In einer Dose D_1 befinden sich fünf rote, acht blaue und sieben grüne Kugeln.
1. Axel zieht eine Kugel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel rot oder blau?
 2. Kurt zieht nacheinander zwei Kugeln. Die zuerst gezogene Kugel legt er nur dann zurück, wenn sie grün ist. Ermitteln Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mit dem 2. Griff eine grüne Kugel zieht.
 3. Axel zieht drei Kugeln ohne Zurücklegen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: „Drei verschiedenfarbige oder drei gleichfarbige Kugeln werden gezogen.“
- b) Axel zieht aus der Dose D_1 zwei Kugeln und legt sie in eine zweite Dose D_2 , in der bereits eine rote, drei blaue und zwei grüne Kugeln liegen. Danach zieht Axel aus der Dose D_2 eine Kugel. Ermitteln Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel blau ist.
- c) Der Dose D_1 werden sechs blaue Kugeln entnommen, mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert und in eine leere Dose D_3 gelegt. Axel vereinbart mit Kurt folgendes Spiel:
- Axel zieht eine Kugel aus der Dose D_3 , notiert ihre Zahl a und legt die Kugel zurück. Danach zieht Kurt eine Kugel aus der Dose D_3 , notiert ihre Zahl k und legt die Kugel zurück.
1. Durch $d = |a - k|$ wird eine Zufallsvariable definiert. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion mit Hilfe einer Wertetabelle an und berechnen Sie den Erwartungswert von X .
 2. Für $d > 2$, erhält Kurt $(2 - d)$ DM von Axel, andernfalls zahlt Kurt d DM an Axel. Welchen Gewinn bzw. Verlust erwartet Kurt bei insgesamt 12 Spielen?

Aufgabe 3: GK 1990

Zwei Seitenflächen eines idealen Würfels tragen die Augenzahl 2, zwei Seitenflächen die Augenzahl 3, eine Seitenfläche die Augenzahl 1 und eine Seitenfläche die Augenzahl 4.

- a) Der Würfel wird einmal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Die Augenzahl ist ungerade.

B: Die Augenzahl ist 1 oder 4.

C: $A \cup B$

- b) Der Würfel wird zweimal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

D: Beim ersten Wurf erscheint die Augenzahl 1 oder 2.

E: Beim zweiten Wurf erscheint die Augenzahl 3 oder 4.

F: Es erscheinen zwei gleiche Augenzahlen.

G: Das Produkt der Augenzahlen ist höchstens 2.

Untersuchen Sie, ob die Ereignisse F und E voneinander unabhängig sind.

- c) Durch die Augensumme aus zwei Würfeln wird die Zufallsvariable X definiert.

Stellen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion w_X durch eine Wertetabelle dar.

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

- d) Fritz und Karl vereinbaren folgendes Spiel:

Karl würfelt zweimal. Wenn Karl mindestens einmal eine 1, zahlt er an Fritz 1,50 DM.

In allen anderen Fällen wird die Augensumme aus beiden Würfeln bestimmt und Karl erhält von Fritz 11% der Augensumme.

Zeigen Sie, dass das Spiel nicht fair ist.

Welchen Betrag müsste Fritz statt 1,50 DM bekommen, damit das Spiel fair ist?

- e) Der Würfel wird fünfmal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

H: Die Augenzahlen 1 und 4 treten nicht auf.

I: Der Würfel zeigt fünfmal dieselbe Augenzahl.

K: Jede Augenzahl von 1 bis 4 kommt mindestens einmal vor.

Aufgabe 4: GK 1990

Ein Computer ist so programmiert, dass er nach Eingabe einer natürlichen Zahl k die Menge der Zahlen $\{1, 2, \dots, k\}$ bildet und eine Zahl aus der Menge zufällig anzeigt. Jede dieser Zufallszahlen kann mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{k}$ erscheinen.

Jana und Fritz benutzen das Programm für folgendes Spiel:

Fritz gibt eine Zahl k_1 ein. Die dann vom PC ausgegebene Zahl wird notiert.

Dann gibt Jana ihre Zahl k_2 ein. Die dann vom PC ausgegebene Zahl wird auch notiert.

Der Spieler, bei dem der PC die größere Zahl ausgibt, erhält vom anderen Spieler die Differenz der ausgegebenen Zahlen in DM als Gewinn ausbezahlt.

- a) Nun geben Jana und Fritz beide die Zahl 4 ein. Zeichne das zugehörige Baumdiagramm. Die Zufallsvariable X sei Elses Gewinn pro Spiel.

Stellen Sie für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion ω eine Wertetafel auf.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

A: Jana gewinnt 2 DM oder die verliert 2 DM.

B: Fritz verliert einen ungeraden DM-Betrag.

Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

- b) Es sei weiterhin $k_1 = k_2 = 4$.
Jana und Fritz spielen einmal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Jana beide Spiele?
Jana und Fritz spielen dreimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Jana zweimal und ein Spiel endet unentschieden?

Jana und Fritz spielen zweimal. Vier Spiele enden unentschieden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese vier Spiele aufeinander folgen?

- c) Jetzt sei $k_1 = 3$ und $k_2 = 4$.
Wie groß ist der mittlere Gewinn, den Jana pro Spiel erzielen kann?

Jana und Fritz wollen das Spiel fair machen und ändern die Regel so:

Erzielt Fritz die größere Computerzahl, wird der Gewinn wie bisher ausbezahlt.

Erzielt aber Jana die größere Computerzahl, wird nur ein bestimmter Prozentsatz des seitherigen Gewinns ausbezahlt. Berechnen Sie diesen Prozentsatz.

- d) Das Programm wird folgendermaßen geändert:
Der Zufallszahlengenerator liefert nach Eingabe der Zahl 3 eine Zufallszahl, die jedoch nicht angezeigt wird, sondern als Eingabe für einen neuen Aufruf des Zufallszahlengenerators dient. Die bei diesem zweiten Aufruf des Zufallszahlengenerators ermittelte Zufallszahl wird angezeigt.
Die Zufallsvariable Y wird durch die vom Computer angezeigte Zahl definiert.
Berechnen Sie den Erwartungswert von Y .

Aufgabe 5: GK 1990

In einer Urne befinden sich 7 schwarze und 2 weiße Kugeln. Aus dieser Urne wird wiederholt eine Kugel zufällig gezogen. Ist die gezogene Kugel weiß, wird sie in die Urne zurückgelegt. Ist die gezogene Kugel schwarz, wird sie entfernt und an ihrer Stelle eine weiße Kugel in die Urne gelegt. Diese Regel ist bei allen Teilaufgaben zu beachten.

- a) Aus der Urne werden nacheinander 4 Kugeln gezogen.
Zeichnen Sie dazu ein Baumdiagramm und tragen Sie die Wahrscheinlichkeiten ein.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
- A: Genau eine der gezogenen Kugeln ist schwarz.
 - B: Nur die zweite gezogene Kugel ist weiß.
 - C: Die zweite gezogene Kugel ist weiß.
 - D: Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist weiß.
- b) Aus der Urne wird so lange gezogen, bis die gezogene Kugel weiß ist.
Durch die Anzahl der benötigten Ziehungen wird die Zufallsvariable X definiert.
Stellen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion durch eine Wertetafel dar.
- c) Bei einem Glücksspiel wird der Urne n mal eine Kugel entnommen.
Es wird nach folgender Tabelle ausgezahlt:

Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln	2	1	0	
Auszahlung in DM	2	1	3	0

Welches Spiel lohnt sich der Betrüger des Spiels mindestens verlangen, damit er auf Dauer nicht verliert?

Aufgabe 6: GK 1990

Ein Kartenspiel besteht aus 12 Spielkarten. Jede Karte ist durch eine Farbe und durch einen aufgedruckten Zahlenwert gekennzeichnet.

In der folgenden Tabelle gibt ein Kreuz an, dass die betreffende Karte in diesem Kartenspiel vorhanden ist.

Farbe \ Wert	10	7	4	2
rot	+	-	+	+
grün	+	+	+	+
blau	+	+	+	-
gelb	+	+	-	-

- a) Die 12 Karten werden hintereinander aufgelegt. Wie viele Anordnungenmöglichkeiten gibt es
- mit Berücksichtigung beider Merkmale?
 - mit Berücksichtigung beider Merkmale, wenn dabei die erste und die zweite Karte rot sind?
 - mit Berücksichtigung des Wertes, aber ohne Berücksichtigung der Farbe?

- b) Die 12 Karten werden gemischt. Ein Spieler zieht dreimal eine Karte. Nach jedem Zug werden Farbe und Wert notiert, die Karte zurückgelegt und wieder gemischt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten folgende Ereignisse ein?

E₁: Die erste gezogene Karte ist blau.

E₂: Keine der gezogenen Karten ist blau oder rot.

E₃: Höchstens zwei der gezogenen Karten tragen den Zahlenwert 10

- c) Die 12 Spielkarten werden gemischt und mit einem Griff werden zwei Karten gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E₄: Die Summe der Kartenwerte ist 10.

E₅: Die Summe der Kartenwerte ist 6 oder 8.

E₆: Die Summe der Kartenwerte ist größer oder gleich 9.

Sophie betet Moritz folgendes Spiel an: Moritz zahlt t DM Einsatz und darf mit einem Griff zwei

Karten ziehen. Tritt das Ereignis E₅ ein, dann zahlt Sophie das Dreifache des Einsatzes aus.

Tritt das Ereignis E₄ ein, dann zahlt sie das Dreifache des Einsatzes und zusätzlich $(t-1)^2$ DM.

Tritt das Ereignis E₆ ein, behält Sophie den Einsatz.

Bei welchem Einsatz $t \geq 1$ ist die Gewinnerwartung von Sophie am größten?

- d) Den 12 Spielkarten wurden gelbe Karten hinzugefügt. Moritz zieht eine Karte, notiert ihre Farbe und legt sie zurück. Danach zieht er eine zweite Karte und notiert auch deren Farbe.

Für das Ereignis

E₇: Die erste gezogene Karte ist grün und die zweite gezogene Karte ist gelb

ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,05.

Wie viele gelbe Karten wurden mindestens hinzugefügt?